



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### **Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### **About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

## Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

## À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

1509.5

HARVARD COLLEGE LIBRARY



BOUGHT FROM THE INCOME OF THE FUND  
BEQUEATHED BY  
PETER PAUL FRANCIS DEGRAND  
(1787-1855)  
OF BOSTON

FOR FRENCH WORKS AND PERIODICALS ON THE EXACT SCIENCES  
AND ON CHEMISTRY, ASTRONOMY AND OTHER SCIENCES  
APPLIED TO THE ARTS AND TO NAVIGATION





*Lettere Lagrange matematiche di un suo amico, nato ad Ivrea, Socio dell'Accad. di Torino  
ma il suo vero luogo di nascita è in Piemonte, nel 1768 (1768-1783)*

**|| LETTRES INÉDITES**

DE

**JOSEPH-LOUIS LAGRANGE**

A

**LÉONARD EULER ||**

TIRÉES DES ARCHIVES DE LA SALLE DES CONFÉRENCEES  
DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE SAINT-PÉTERSBOURG

ET PUBLIÉES

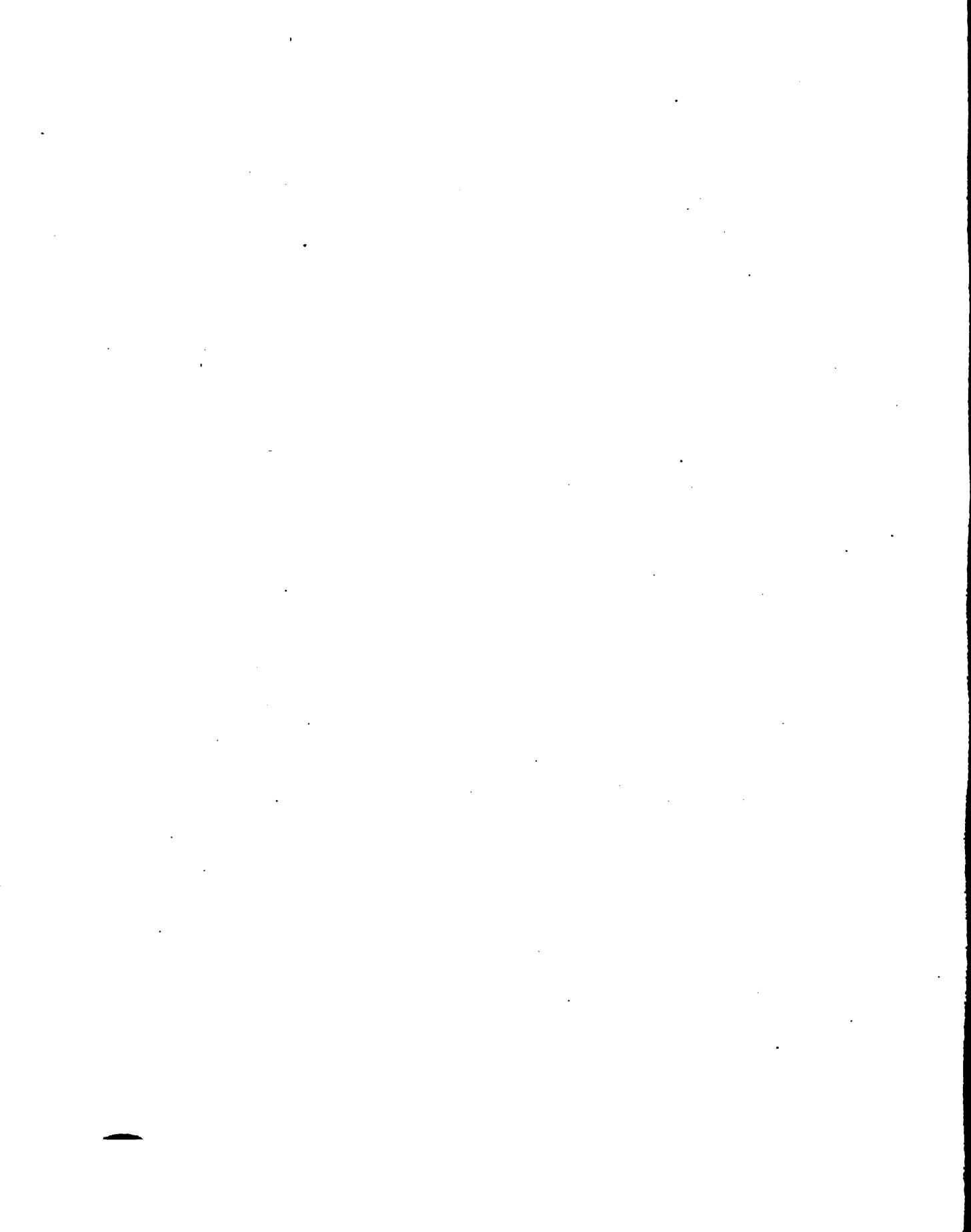
**PAR B. BONCOMPAGNI**

MEMBRE ORDINAIRE DE L'ACADÉMIE PONTIFICALE DES NUOVI LINCEI,  
MEMBRE CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE BOLOGNE,  
DES ACADÉMIES ROYALES DES SCIENCES DE TURIN, ET DES SCIENCES, LETTRES ET ARTS DE MODÈNE  
ET MEMBRE HONORAIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE BERLIN.

**SAINT-PÉTERSBOURG.**

EXPÉDITION POUR LA CONFECTION DES PAPIERS DE L'ÉTAT.  
ATELIER HÉLIOGRAPHIQUE DIRIGÉ PAR G. SOAMONI.

MDCCCLXXVII.



**LETTRES INÉDITES**

**DE**

**JOSEPH-LOUIS LAGRANGE**

**A**

**LÉONARD EULER.**



# LETTRES INÉDITES

DE

## JOSEPH-LOUIS LAGRANGE

A

## LÉONARD EULER

TIRÉES DES ARCHIVES DE LA SALLE DES CONFÉRENCES  
DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE SAINT-PÉTERSBOURG

ET PUBLIÉES

**PAR B. BONCOMPAGNI**

MEMBRE ORDINAIRE DE L'ACADÉMIE PONTIFICALE DES NUOVI LINCEI,  
MEMBRE CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE BOLOGNE,  
DES ACADÉMIES ROYALES DES SCIENCES DE TURIN, ET DES SCIENCES, LETTRES ET ARTS DE MODÈNE  
ET MEMBRE HONORAIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE BERLIN.

SAINT-PÉTERSBOURG.

EXPÉDITION POUR LA CONFECTION DES PAPIERS DE L'ÉTAT.  
ATELIER HÉLIOGRAPHIQUE DIRIGÉ PAR G. SCAMONI.

MDCOCLXXVII.

S 1509.5

V



*DeGrand fol.*

# Ludovicus Lagrange Leonh: Eulero

S:

tantum mihi prece, ac sedulo animo inquirenti, cum et  
 in differentialibus, ut in potestatis, certis aliquis ingit. modo,  
 datum tandem est, ut in seriem a Newtoniana parum  
 discrepantem inuiderim, que ad cuiusvis gradus differentiationis  
 equali ac integrationis possit accomodari, non secus ac illa  
 Newtoni ad potestates, et radicales. Erunt itaq; utraq; prima  
 Newtonianam, alteram meam, ut si quid in ipsis sine  
 similitudinis, totam uno oculi ictu respiciat:

$$x^m = a^m b^0 + m a^{m-1} b^1 + \frac{m \times m-1}{2} a^{m-2} b^2 + \frac{m \times m-1 \times m-2}{3} a^{m-3} b^3$$

$$+ \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{4} a^{m-4} b^4 \text{ \&c.}$$

$$x^{-m} = x^m y^0 + m x^{m-1} y^1 + \frac{m \times m-1}{2} x^{m-2} y^2 + \frac{m \times m-1 \times m-2}{3} x^{m-3} y^3$$

$$+ \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{4} x^{m-4} y^4 \text{ \&c.}$$

aut vero, quod ad hujus seriei explanationem pertinet, animadu-  
 vertendum imprimis exponentes, si positivi, gradus differentia-  
 tionis, si negativi, gradus integrationis denotare, si autem  
 aequalis nihilo, tunc signum esse, quantitatem illam,  
 cui hujusmodi addit: exponentis neg: differentiatione, neg: integratione

operi habere, sed potius uti est, relinquendam; Verum haec  
 omnia claris exemplis aliquot propiis popa existant. Habet  
 itaq: differentiale  $x^m$  ipsius  $x \cdot y$  factis  $m=1$ , series huius  
 induet valorem  $x^1 y^0 + x^0 y^1$ , seu  $dx y + x dy$ ; si  $m=2$   
 series fiet  $x^2 y^0 + 2x^1 y^1 + x^0 y^2$ , unde obtinebit: differentiale  
 $d^2 x y + 2 dx dy + x d^2 y$ ; eodem modo si  $m=3$  fiet differentiale  
 $d^3 x y + 3 d^2 x dy + 3 dx d^2 y + x d^3 y$ ; existante nempe alia  $d^2 x$  fluo

Itaq: idem dicitur de caeteris differentiationis gradibus. Veniamus  
 nunc ad integrationem. Quiaq: integrale huius quantitatis  
 $y dx$ , substituta itaq: in serie  $d^m x$  loco  $x$ , et factis  $m = m-1$   
 (quoniam integrale quod quaeritur est  $x^m$ ) in hanc ipsam  
 transformabitur:

$$dx^{-1} y^0 - dx^{-2} y^1 + dx^{-3} y^2 - dx^{-4} y^3 + dx^{-5} y^4 - dx^{-6} y^5 \text{ etc.}$$

Ponit  $dx^{-2} = x$ ,  $dx^{-3}$  integrale  $\frac{x^2}{2} dx$ , seu integrale  $x^m$  ipse  
 $= \frac{x^2}{2 dx}$ ,  $dx^{-3} = \frac{x^3}{2 \cdot 3 dx^2}$ ,  $dx^{-4} = \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 dx^3}$ , et generatim  
 $dx^{-m} = \frac{x^m}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots m dx^{m-1}}$  posita nempe semper  $d^2 x$  constans

hoc autem  $y$  harum quantitatum differentiatione videtur est, ut  
 $d \cdot \frac{x^2}{2 dx} = x$ ,  $d \cdot \frac{x^3}{2 \cdot 3 dx^2} = \frac{x^2}{2 dx}$  etc.

Substitutis igitur huius valoribus in serie mox inventa, fiet  
 integrale quaesitum, seu

$$\int y dx = xy - \frac{x^2 dy}{2 dx} + \frac{x^3 d^2 y}{2 \cdot 3 dx^2} - \frac{x^4 d^3 y}{2 \cdot 3 \cdot 4 dx^3} + \frac{x^5 d^4 y}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 dx^4} \dots$$

Sed an non haec est illa ipsa series, quam jampridem  
 ulaberrimus Leibnitzius pro valore  $\int y dx$ , dedit?

Verum haec methodo non haec tantum, sed infinite prop...

aliae, in quibus, vel solum  $y$ , vel  $y$ , et  $dy$ , vel  $y$ , et  $dy$ , et  $dy^2$  &c.  
 defiant, pro ut opus fuerit, pro eadem quantitate  $\int y dx$   
 poterunt inveniri; namque loco,  $y dx$  accipiat: ejus differentialis  
 $dy dx$ , et substituat in serie generali  $dy$ , loco  $y$ , et  $dx$  loco  $x$ ,  
 et facto  $n = -2$  (quia hic duplex requiritur integratio)  
 ipsaq; reducere habebitur

$$\int dx = \frac{x^2 dy}{2 dx} - \frac{2x^3 dy^2}{2 \cdot 3 dx^2} + \frac{3x^4 dy^3}{2 \cdot 3 \cdot 4 dx^3} - \frac{4x^5 dy^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 dx^4} \text{ &c.}$$

Hanc autem seriem etiam eorum que ipsius  $\int y dx$  valore  
 quibus potest exprimi eam bij differentiando, restitui esse semper  
 observabit: ipsaq; prima quantitates,  $\frac{dy}{dx}$  caeteraq; terminiq;  
 se mutuo desinentibus. Unde igitur quomodo et ad alios  
 accommodari possit integratione. Interim tamen hoc firmo  
 tenendum loco  $x$  in serie generali semper substituendam  
 esse aliquam quantitatem, cujus differentiales et constantes ha-  
 beat; vel saltem ipsummet differentiale constans; necesse enim  
 nunquam obtineri possent valores veri quantitatu  $x^{-1}$ ,  $x^{-2}$ ,  $x^{-3}$  &c.

Atq; haec quidem sunt, Vir Clarissime, quae tibi haec deca  
 nunc perhibenda judicavi; ceterum maximo meo erga te  
 studio condo ut, si hoc mihi jecerim, ut ad te literas dera,  
 (se quo esse praecclarissima scripta tua, atq; praestantissimum  
 imprimiq; Mechanicae opus evolovera caepi, ita semper in te  
 animo affectus fui, ut nihil optatius sperare haberem, qua  
 ut hujusmodi animi mei tibi per literas significandi occasionem  
 nancisceretur, nunc vero, quoniam, hujusmodi novi inventi mei  
 gratia sepe mihi opportuna obtulit, ipsam certe de manib;

Dimittere nullo modo potui. Gratissimum potero mihi nunc  
facere, si haec de se quid sentias, ejus me participem facias  
et praesertim, an, praeter Usurariam, Theoriam musicae  
Solutionem Isoperimetrii problematis, et Introductionem  
in infinitorum analysin, in lucem edideris, mitte enim, q  
actis Academiae Petropolitanae, et Berolinensis inserta  
sint; et praecipue eximium circa fluxum, et refluxum  
maris calculum, haec. tunc mihi facere omnia probe nota  
Habere fortassis alia tibi mittenda, ac imprimis proble  
unum totam gnomonicam pro superficiibus: quibuscunque  
formalis duabus algebraicis, completaris, ex doctrina de su  
ficiibus exatam; observationesq; nonnullas circa maxima  
minima, quae in naturis, antiquis, ingunt. Usurus re  
majorem amplius molestiam, sollicitudinem: tibi afferam epi  
stolam huius meae finem imponam. Vale.

Saurini  
4<sup>to</sup> cal: Julii

De celeberrimo Wolffii obitu  
velim me certior fieri

Vir Anglijime, atq: Celeberrime,

Aditanti mihi oppide, praeteritis diebus, praecelerrimum librum tuum de  
methodo maximorum, et minimorum ad lineas curvas applicata, factum tandem  
est, ut, quod jam dudum mihi erat in desideratis, incederem in viam diam longe  
quae brevioram problemata hujusmodi resolvendi, seu formulae tuae, atq: omni  
lineari constructione, demonstrandi; Quum eam igitur, ob simplicitatem quam  
tibi omnino non displicentiam putaverim, ut pote qui similes fortassis jam  
exoptas mihi vijus sis in p. 39 cap: 2 ejusdem libri; ubi atq: Desideratur  
itaq: methodus ad resolutionem geometricam, et lineari liberam, quae pateat in tali  
investigatione maximi, minimiq: loco p. 79, sibi oportuna p. 80; hoc mihi  
numquam summae cuius sum, ut illius te participem facerem, vatis quidquid  
temeritatis, et arrogantiae in hac parte comissum fuisset, id a te omnia  
pro summa tuae humanitate facile condonatum iri. Quamquam, cum mesia  
te hesitandum fuerat, an mihi, qui obscuri adhuc nominis, tuam tantum  
vivum, omni generis scientiarum genera clarissimum, interpellare liceat, maxime  
meum tamen, ac glorie singularis affectum meum in te ex operum tuorum studio  
jam pridem conceptum, afficit, ut opportunam hanc illi tibi, quos deus quae  
testandi suggestionem, quam vehementissime exoptabam, de maribus dividere  
nullo modo potuissim. Nali igitur, Vir nobilissimae, miam hanc, qualis  
unquam ea sit, audaciam graviter fessa, ea tamen non aliunde carita, quae  
se ardentissima, quae tenax desideria, in humillimosum ultimum tuum  
numeri ingrediendi, proficiuntur. Interim, dum me qualitas tuae, ac

benivolentiae devote commendo, te summopere rogitum cupio, ut quid de  
 tenui meae vae ingenio sentias, ejus me participari reddendi gratiam mihi  
 valij; hoc tunc in omnium, quae tibi jam debent agnosca unum certe  
 det. Vale, et fave.

Dabam Taurini die 12 Augusti 1755.

Suae ad me literae, quo facilius, Amplitudinis tuae cultori devot<sup>o</sup> et indy  
 promptiusq; mihi reddant: veltij Ludovic de la Grange Journier.  
 facies si ita ingruat: A M:  
 Durand Banquier pour remettre  
 v: l: p: a M: Louis de la Grange.

Praenotanda

- 1 Differentiales ipsius  $y$ , quatenus hic differentiativae, et manente, pro habendo  
 limo, minimis formulae datae valore, ad distinctionem aliam quidem  $y$  di  
 tarum, quae in illa jam ingrediuntur; denotabo  $\delta$ . Sive et  $\delta y$  est dif  
 terentia ipsius  $y$ , dum  $y$  accipit quantitatem  $\delta y$ ; item sic generaliter de  
 $\delta x$  ( $\delta y$  mihi est summa quaecumque  $y$ ).
- 2 Ex dissertatione tua de infinitis curvis ejusdem generis Comm. Acad. Petrop:  
 1754 inserta, sub initium facile colligitur semper  $\delta \cdot \delta x y = \delta^2 x y$ ,  
 generaliter  $\delta \cdot \delta^m x y = \delta^{m+1} x y$ ; unde et  $\delta^2 y = \delta^2 y$ .
- 3 Ex calculo differentialium patet quod  $\int z dw = zw - \int w dz$ ;  
 $2. \int z^2 dw = z^2 w - w dz + \int w dz$ ;  $3. \int z^3 dw = z^3 w - 3z^2 w dz + 3 \int w dz$   
 et sic de ceteris.
- 4 Similiter ex eodem videtur est  $\int u dv = uv - \int v du$ ; unde si  $u$  pro  
 $x = a$  ( $w$ ,  $z$  et  $v$  sunt funct:  $x$ , et  $y$ ) fiat  $= H$ , et  $H - uv = V$  erit  
 pro  $x = a$   $\int u dv = \int v du$ .



unde fiat  $\delta z = \int N dy + \int P \delta dy + \alpha_i + \int e^{\int L} \int e^{-\int (N)} \delta y + \int e^{\int L} \int e^{-\int (P)} \delta y$   
 quapropter si  $\int e^{\int L}$  positio  $\alpha = a$  abeat in  $\Pi$ , et  $\Pi = \int e^{\int L}$  in  $V$ ,  
 habebimus operando ut supra  $N + (N)S - \partial \cdot (P + (P)S) + \alpha_i = 0$   
 seu ponendo  $\int e^{\int L} V = S$ , erit  $N + (N)S - \partial \cdot (P + (P)S) + \partial^2 (Q + (Q)S) - \alpha_i = 0$

Similiter invenio etiam equationem pro habendo maximo minimoque, si pro  $\delta \Pi$   
 loco superioris aeq:  $\partial \delta \Pi = (L) \delta \Pi + (N) \delta y + (P) \delta dy + \alpha_i$  habeatur. hanc aliam  
 $\partial^2 \delta \Pi = (K) \delta \delta \Pi + (L) \delta \Pi + (N) \delta y + (P) \delta dy + \alpha_i$ : quod uis uenire potest in  
 querenda brachyochrona in hypotaxi, quod longum uis uenire potest sequi  
 datum centrum uis uenire potest. alij in casibus hinc multij.  $\int$  generaliter  
 hanc methodum succedit, uis uenire potest ordinij differentialis ipsius  $\delta \Pi$  in eius  
 equatione continetur.

Scholion

Quod supra in problem: 1<sup>mo</sup> ut et in ceteris alij posuimus  $\delta y, \delta dy, \alpha_i = 0$ , id, ut ibidem  
 innui, ex eo factum est, quod data consideraverim plura uis uenire potest; ita ubi  
 $y, y', y''$  etc. pro constantibus fuerant habendi; Verum si  $f: y$ : in eorum 1<sup>mo</sup> uis uenire potest  
 tantum det: punctum, adeoque una applicata, seu  $y$  tantum haberi debet pro const:  
 hinc fiat quidem  $\delta y = 0$  sed non  $\delta dy = 0$ , unde ponendum erit  $\alpha = 0$  eius uis uenire potest  
 seu  $Q - \alpha_i$ , ex quo habebit: determinatio uis uenire potest constantij; hinc erit, ut patet, in  
 $Q - \alpha_i$  ponitur  $\alpha = a$ ; Si nulli uis uenire potest daretur praeter  $R + \alpha_i$ : etiam  
 $Q - \alpha_i + \alpha_i$ : aequandum esset nichilo, unice duas haberent: constantiu<sup>9</sup> determinationem  
 Atq: hoc, in ceteris problematibus, idem dicendum; Ceterum aliquando evenit, ut  
 non puncta, sed alias determinationes habeatur; ut in querenda uis uenire potest uis uenire potest  
 appulsi ad restam positionem datam; hic, et similibus casibus, auxilio quodam simp:  
 uis uenire potest uno, eodemq: calculo non solum speciem, sed et individualitatem uis uenire potest  
 tas invenio; ut in hoc exemplo calculi mihi statim ostendit, eam esse illam  
 uis uenire potest, quae datum rectae ad angulum rectae scilicet.

Non omittendum quod calculum hunc ad superficies etia<sup>9</sup> maximi minimiq:  
 proprietate quaquam praeditas inveniendae eadem facilitate, applicata, quae  
 si iam a quospiam fuerit praestita, intelligere vehementer gauderem.

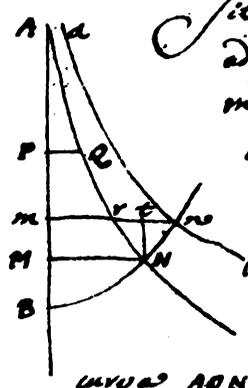
Vir Amplissime, atq: Celeberrime  
fautor Colendissime.

(: Quod ad tuas ad me literas  
allinet, vultissima facias si illas  
revertori Durando, inferibere,  
vique mibi remittant;:, perge.

Dabam Laurini  
die 20 Novembrij 1755

Redditæ mihi sunt, dum vixi opem, literæ tuæ expectatissimæ, ex quib:  
judicissimum præter modum fuit intelligere meditamentum illud meum  
de maximorum, et minimorum methodo tibi non parum fuisse probatæ.  
Volo vehementer, Vir Clarissime, quod nonnullis formæ inopinatis occu-  
pationib: distentis, tibi pristinis respondere non potuerim; factum enim  
est, ut electus fuero Professor in Scholæ nostræ mathematicæ mibi  
tarib:, quod sane munus mibi, aliud cogitanti, et, non dum <sup>idibus</sup> 20. annorum,  
juveni delaturo, negotia plurima, et quæ nullo modo differri <sup>libet</sup> ~~possent~~,  
non potuit non facerem; Quamobrem te etiam, atque etiam rogo, et  
mibi ignoscere velis hanc in scribendo moram omnino involontariam.  
Maximas porro, quæ possum, gratias tibi refero, pro <sup>te</sup> tantisq: honorib:  
atq: affectus ergo meo testimonij, quibus literæ tuæ abundare  
animadverti. Ego sane, si quid tuæ attentione dignum confeci, id  
procul dubio totum tibi debere agnosco; summa enim opera tua,  
illæ sunt paucæ, quæ me ad ipsius Analysis profundiora perduxerunt

Quapropter me tibi gratissimum spondeo, ac maxime quo unquam modo  
 debitorem profiteor. Jamvero in epistola tua, te exoptare ostendis,  
 ut ego analysim illam diligentius adhuc excolam, ut forte ex quo  
 sublimiora forsitan erui possint, et simul etiam humanissimij, ac  
 perquam honorificij verbij me cohertere non dedignarij; igitur non  
 te aegre laturum puto si tenuia aliqua, quae de hac re iniecerim  
 habui, cogitata exponendo, tibi fortassis molestiam creaverim. <sup>ad</sup>  
 In superiorib: mihi dixi, me eadem analysi determinare posse curvas  
 optimi appulsi ad datam lineam; sed itaque quomodo iam perago?



Sit AQN curva brachystochrona simul, et utissimij appulsi  
 ad datam lineam BNW, in qua ponit: AP = x, PQ = y, AM =  
 mm = dx; sitq: alia infinite parva dixerimus, ac, quam  
 curvam differentiationis voco, quae: omni singulij appulsi  
 y incrementis suo indefinitis dy evadentib:; Nunc quae  
 formula maxima minimave facienda est  $\int \frac{ds}{v}$ ; de  
 notante u altitudinis claritati debitam, ponat: appu-

Su = v dy, et habebit: pro differentiali ipsius  $\int \frac{ds}{v}$  dum  
 curva AQN in an transijt, hinc valor  $-\int ds v dy + \int \frac{dy \delta dy}{v}$  quod  
 induit: ad  $\int (-2 \cdot \frac{dy}{v} - \frac{v ds}{2u^2}) dy + \frac{dy}{v} \cdot dy$ . Verum quia ex hypoth  
 utissimij appulsi integrale  $\int \frac{ds}{v}$  pro curva AQN accipi debet per totam  
 AN, hoc, quod pro an accipiendum est tantum per AN, hinc fit ut  
 mutata curva AQN in an hoc integrale decipiat <sup>2uo</sup> elemento quod esse  
 elemento mm = dx, axis AM; Igitur: verum ipsius  $\int \frac{ds}{v}$  differentia  
 hoc casu fiet =  $\int (-2 \cdot \frac{dy}{v} - \frac{v ds}{2u^2}) dy + \frac{dy}{v} \cdot dy - \frac{ds}{v}$  ponendo in  
 his duobus postremis terminis  $u$  a pro x; quod adeo nihilo

quantum dabit 1<sup>mo</sup> pro aequat: ad curva quaesita,  $-d \cdot \frac{dy}{\sqrt{u}} - \frac{v ds}{2u^{\frac{3}{2}}} = 0$  (ut nuper  
 hunc ex indeterminatj  $dy$  in ipsa ingredi possit) deinde probabit etia  
 puncto intersectionis  $N$  quod respondeat abscissa  $= a$ ; hanc altera aequat:  
 $\frac{dy}{\sqrt{u}} = \frac{ds}{v}$ ; seu  $dy \cdot dy = ds^2$ ; seu quia hoc loco  $dy = vt$ ,  $ds = vn$ , et  
 $= vN$ ;  $vt \times vn = vN^2$ ; unde conficitur: angulu<sup>2</sup> intersectionis  $vN^2$  esse debere  
 tantu<sup>2</sup>; Ceterum levi attentione perspicitur: nisi sit  $du = v dy$  (quod quidem  
 erit nisi sit  $u$  functio determinata ipsoru<sup>2</sup>  $x$ , et  $y$ ) hanc proprietatem  
 unam amplius habere non possit, unde sub hac limitatione intelligi debere  
 debet: proprietas  $1^a$  et  $2^a$  egregie mechanicis operib. Hanc porro methodo,  
 omnino et ad alios magis complexos casus possit nullo negotio accommodari,  
 si certe supervacaneu<sup>2</sup> foret ostendere; sufficiat hanc ita leviter attingere, et  
 nullo igitur ad aliud, quod in illa analysi observari, et iuxta quo<sup>2</sup> iudicium  
 uno doctissimi<sup>2</sup> praecipue exoptat; Namque quoniam ex natura maxi-  
 orum, et minim: ut rectissime in exist: tunc aq, quae tantu<sup>2</sup> debet  $\delta \cdot f z = 0$   
 uno pro formula<sup>2</sup> integrali indefinita,  $f z$  tantu<sup>2</sup>, loco quod tunc possit  $f z dx$ ,  
 via tunc mihi non opus sunt substitutiones tunc p<sup>o</sup> pro  $dy$  et: inutile  
 erat velle omnes formulas ad hanc  $f z dx$  reducere, quod aliquando nisi illa  
 una substitutione<sup>2</sup> opus non esset: evidens est, si plures forent valori ipsius  $\delta \cdot f z$   
 onicari possint, plures etia<sup>2</sup> haberi possent divergas aequat: ipsas tamen omnes  
 satis sub conditionib: satisfacturas nequa<sup>2</sup> sit. Jam vero 1<sup>mo</sup>  $\delta \cdot f z$  exprimitur:  
 per  $\int (N - d\rho + d^2 \rho - \alpha_i) dy + (\rho - d\rho + \alpha_i) dy + (\rho - \alpha_i) ddy + \alpha_i$ . Sed possit breviter  
 talib: gratia  $(N - d\rho + d^2 \rho - \alpha_i) = L$  est  $\int L dy = L dy - \int dL dy = L dy - dL dy$   
 $+ \int d^2 L dy$ , et sic in infinitum unde habet:  $\delta \cdot f z =$   
 $\int L dy + (\rho - d\rho + \alpha_i) dy + (\rho - \alpha_i) ddy$ ; 2<sup>o</sup>  $-\int dL dy + L dy + (\rho - d\rho + \alpha_i) dy + \alpha_i$   
 $\int d^2 L dy - dL dy + L dy + (\rho - d\rho + \alpha_i) dy + \alpha_i$  et sic ulterius procedendo  
 unde si ponat: in loco ubi  $x = a$ , evanescant  $dy$ ,  $ddy$  et: fiat ex 1<sup>mo</sup>  
 valor,  $\delta \cdot f z = \int L dy$ , ex quo aeq: pro curva oritur:  $L = 0$ , quae ideo ea<sup>2</sup>

præbat curva, ut nota est, quæ max: min: proprietate gaudet inter omnes, q  
 pro puncto abscissæ = a tum data habet applicata tum etiã data tangentij  
 ad axem inclinationis Ox:; Si vero etiã præterea etiã tota sibi ponat: hæc  
 = 0, tum ex 2<sup>o</sup> valore habet:  $Dfz = -f \cdot Df \cdot Dy$  ex quo pro curva quæ sit  
 sit  $Dz = 0$ , quæ adeo max: min: data proprietate gaudet inter omnes,  
 quæ præter prædictas conditiones habet etiã hæc ut summa omnium inci  
 dentium  $Dy$  sit = 0; Simili modo sequitur: ex 3<sup>o</sup> valore, ponendo etiã  
 $f \cdot Dy = 0$ , hæc arg:  $Dz = 0$  pro curva in qua adget præterea conditio  
 ut tota summa 2<sup>o</sup> gradus ipsorum  $Dy$  fiat evanescent, et sic de ceteris.  
 Jam vero quomodo possit  $f \cdot Dy = 0$  necessariis curvæ differentiationis suam  
 beat priorem in aliquo puncto intermedio, et possit præter  $f \cdot Dy = 0$ , etiã  
 $f \cdot Dy = 0$ , tum duo existere debeat intersectionis puncta, hæc concludi  
 posse videt: equat: hæc  $Dz = 0$ ,  $D^2z = 0$  Ox: tum habere debet, in quæ  
 curva, quæ data proprietate sit prædicta, ubi præter extremas, etiã aliqua  
 data sunt intermedia puncta, per quæ ipsa transire debeat, nempe si  
 habeat: unum, tum satisfacet  $Dz = 0$ , si duo,  $D^2z = 0$ , Ox:  $D$   
 Hinc fiet ut quærendo brachystochonam per data tria puncta transire  
 habeat: non vicibus, sed alia orta esse hæc arg:  $a \cdot D^2 \frac{Dy}{Df \cdot Df} = 0$  pro  
 $D \frac{Dy}{Df \cdot Df} = \frac{Dz}{f^2}$ , quæ in vicibus mutet: facto  $b = \infty$ ;  
 Hæc sunt, Vir Clarissime, quib: te gravissimis forsan distantibus negotiis  
 nunc interpellare audeo; Suis mihi acutissimis sensibus intelligere mihi  
 maxime est in votis; Si gratiam hanc mihi facere non designaveris,  
 hoc certe mihi animos addet, ad ulterius in hac re inquirendum.  
 Quæ tum una superficies, tum alia etiã questionum meditata su<sup>o</sup> in alia  
 reservato tempore; Suis de scientia natali operæ eximie plagi, et non  
 quidem insignia plura hujusmodi problemata soluta animadverti.  
 Jam jam tempus est, ut longe huius epistolæ fine  
 impand: quomobrem dum te exire rogo ut hæc  
 tunc mecum non iniquo velij animo accipere  
 favori tuo atq: benevolentia<sup>e</sup> inestimabili me  
 humillime commendo. Vale, et fave

Tibi deditissimo,  
 adstrictissimo  
 Ludovico de la Gr  
 Sourmier:

Vir Amplissime, atque Celeberrime,  
Fauter honoratissime.

Itaq, quae possum, maximae tibi ago, Vir Clarissime, neque unquam  
agere desinam pro tot, tantisque, quibus abundat rebus, literarum tuarum  
humanitatis, atq; affectus erga me testimonij, impetrisque pro singulari  
que tibi mei cura est, dum juvenis, atq; incertissime conquectur  
tua, participem facies meae prope studij. Equidem res ista, ut vixi fatear  
licet summo per ardua, in prima ingopibile mibi hactenus vixi sit,  
maximum tamen, et persequens vobiscum meorum semper conflictabit.  
unde me tibi, hac occasione, peculiariter modo obsecro, devotissime  
que debere agnosco. Quod itaq; ad sedem meam in Germaniam propa-  
ta <sup>rem</sup> transferendam abest candido diano, quod sentio, hoc mibi nempe  
gratissimum futurum, modo satis honesta, et commoda mibi gratis opera-  
tur; agitq; em de relinquenda domo, et patria, ubi vitam meam  
extra omnes angustias et difficultates transigo, praesertim non jam  
professionem aliquam Mathematicam in Scholis Artilleriae obtinuer-  
im, cum spe ad majores facili perveniendi. Tu, Vir Clarissime,

extra patriam tuam versari; adeoque, quae sint ibi externorum condi-  
tionum optime noxae; idcirco nullo me meliori modo in hoc negotio  
genera populi existimo, quam tibi tam totum permittendo, qui  
tantum iam benevolentiae et affectus significationibus honoratus me-  
hujus. Gratissimum mihi itaque fuerit, maximamque tibi habeo  
gratiam, si, ubi statio aliqua illis mihi offerat: de ea, ipsaque im-  
ditionibus judicium tuum mihi significare pro summa tua hu-  
manitate volueris; ipsae enim regionum illarum poenitentia ignorare  
coegit. Jam de itineris impensis non loquor, haec enim ubi quis  
aliquo vocatur, reddi semper solentur. Interim te summo opere  
rogatum volo, ut Illustissimo Praesidi omnes, quae potest maximae  
meo nomine reddas, gratias tum pro singulari quo meo condensa  
vult, honore, admisionis namque in regiam Berolinensium Acad-  
miam, tum de eo etiam maxime quod meo Potentissimo, ac Illust-  
rissimo Regi valit commendare, simulque ipsum facias certis  
quam devotum, gratissimumque me habeat, et habiturum semper  
sit debitum pro inestimabili, quem in me ostendit, favore  
suo ac patrocinio, quodque ut aeternum mihi fieri deat: oro,  
obsecroque.

Meditationes meas de maximis, et minimis, et de applicatione  
Principii minimi actionis ad dynamicam totam tibi, ac Illust-  
rissimo Praesidi non displicuisse quidem vehementer. Sed in Mechanica  
scriptis pro scholis nostris condendis occupatus in istis versari ag-

is non potui; nonnulla tamen ad hanc spectantia habeo, quae  
et circa ubi magis suggerat tempus communicabo. Sententiam tuam  
et varias, quas propinquam formulam differentialium pro maximis, et  
similibus transformationes mihi probat; summo modo. Interim quod ad  
et attinet, quae de illis utique appulsi ad certam verticalem  
res non potest esse alio modo quam per approximationes paragi  
operi, quia tunc in illis duo adunt constantia, ex quibus una  
certum ad habendum valorem differentialium pro minimo tempore  
obstanti ponit; inveniunt hic nullo modo potest perlocutissima  
regula, quam in dissertatione tui et Acad. Petrop. dedisti.  
Unde ipse valor differentialis per integrale quodiam  
expressi debet, cuius integrationem non aliunde, quam in  
series haberi posse existimo; interim judicium super hanc  
rem meditabor. De principio minimae quantitatis actionis ego  
ita sentio, ut nunc si ad ea excellentissima, quae de eius applicatione  
ad elasticam jam poprim dedisti, adiungantur illa pauca, quae  
partim iam tui communicavi, saltem mecum adhuc habeo.  
tum ad motum corporum quocumque inter se quomodocumque conne-  
xorum, tum etiam ad equilibria, et motum fluidorum quorumcumque  
spectantia, omnium tam staticorum, quam dynamicorum problematum  
universalem veluti clavem haberi posse, quae statim aequationes necessa-  
rias praebet aliam exatius difficillimas. Habet certe in hoc invento  
Cebes: Auctor de quo puer maximae gloriatur. Interim vale, et fave.

Dom. Laurini die 19 Maii  
1756.

(Inglit: tuae  
Devotissimo Ludovico de la Grange  
Journier. )

pour l'Académie Royale des Sciences  
de l'Académie Royale des Sciences  
de l'Académie Royale des Sciences

A Monsieur

Monsieur Euler Directeur  
de l'Académie Royale des  
Sciences de Berlin.

Viri Clarissime, et Excellentissime  
Fautor Honoratissime

uj abhinc diebus ad te mihi Exemplar Operis quod  
auctor quendam privata Jaurinensis in lucem emisit  
6 nomine, Miscellaneorum Philosophico-mathematicorum.  
tat ibi Dissertatio mea de Soni natura et propagatione  
e quo judicium tuum praecipue exopto; sibi enim praeter  
terij de oscillationibus chordarum tenarum, et ex ea  
omula generali quam inveni deduxi primum theoria  
compositionis oscillationum isochronarum quam Daniel  
Bernoulli indirecte. Principij stabilivit, in et demonstravi  
nam tantum locum habere ubi chorda tena curva  
ullius usque ad ponderibus numero finitij onusta consi-  
eraretur; auctorem enim hujus ponderibus numero ad infinitum;  
que in eadem ratione diminuetur, quod chorda uniformiter

causa evadat tota Bernulliana theoria per se labili,  
et formulas mihi suppeditat eam ipsam constructionem  
quam tu, Vir Clarissime, dedisti in dissertatione tua  
de hac re Berolinensibus: Commentarij inserta; quos  
D. J'Alambert oppugnare aggressus est. Haec tibi quae  
ad te pertinent tibi hic significo quia non dubito quod  
litteras istas antea se accepturus quam librum ipsum  
Cetero ibi videris, cum illum acceperis scis erit.  
Litteras hic inclusas D. J. De Moivreus cuius domi-  
ciliam ignoro, rogo ut mittas. In eis loquor precipue  
de libro quem penes jam absolvi de Applicatione  
Principii ultimae quantitatis actionis ad Mechanicam  
statam, cui praemittitur: expositio methodi Maximorum,  
Minimorum, quam tibi ab hinc annis tibi communi-



D. Quoad Directorem literarum Genevae pro  
Rege Sardiniae, inscribere poteris, quo illos mittat  
Favorem ad D. Commendatorem De Caroli Directo-  
litera Generalem literarum (de postea) pro tota Regia  
Sardiniae ditione, de quo mihi tunc reddentur.  
Interim Vir Clarissime mihi ignosce si presertim  
hinc te interpellare audeo, Quum ex oriente bello  
commercium omnes inter septentrionem, et septentrionem urbem  
fuerit interclusum primam, que mihi sepe offert  
ocasio servitutis meae tibi renovandae, libere am-  
pice Vale, et Fave

Favore  
die 4 Augusti 1758. Vir Clarissime

P. J. Cuius salutem qui  
Dissertationem quandam de  
Pulvere Pirio in nostris  
Commentariis dedit interpreta-  
tionem molitur Operis quod  
lingua Germanica compositum inter  
notarum ad D. Robini, me rogavit  
ut te de hac re certiores facerem,  
et quod animum tuum mihi significare valeas.

Tibi omni honoris cultu  
additissimo  
Ludovico des las Granges

Vix Amplius et Celeberrime  
Saudis Honoratissime.

jam pene elapsi sunt anni ex quo nihil amplius  
vrorum nec a te accipere, ne tibi mittere mihi da-  
mnum est. Statim enim ac prorsus bellum exortum est in  
regionibus vestris, mercatores ille per quem epistola nostra  
transferebantur mihi significavit, commercium inter vestras  
& nostras regiones aut omnino interdictum, aut saltem  
periculi, et adeo periculum esse, nec ex eo tempore viam  
illam satis tutam ad id incivisse mihi contigit.

Nunc vero cum praesens liber tui mandentur  
qui aliquando ex parte ad me pertinet, officio meo erga te  
me defuturum putavi, nisi omnem operam adhibuissem  
ut modum quaererem, quo illum tibi quantumvis operae

as dicere possent. Propterea itaque tandem ractis occasione  
tibi misse hoc exemplar Commentariorum Physico-Ma-  
thematicorum quae Societas quaedam privata in lucem  
emittere cepit eo animo ut hujusmodi scientiarum  
studium, quod hactenus nimis jaucisse videtur: apud nos  
aliquomodo excitetur, et promoveatur. Inter dissertationes  
Mathematicas primae duo nihil continent quod tuae  
videatur: attentione dignum, tertia in qua de soni  
naturae, et propagatione agitur, fortassis, ut spero, alicujus  
ponderis videri poterit, ob thesorem, de oscillationibus  
cordarum tenarum, et fibrarum aerearum, quae novo  
et rigore calculo superstructa invenitur; et quae de hac  
praecipue judicium tuum quam vehementissime exopto.  
Quarta demum dissertatio Mathematica labor est Ju-  
nij cujusdam Felicijsini ingenii, qui inter Artilleriae  
Alumnos, neque discipulos est, et a quo maxima  
promitti posse videntur. Reperiatur in hac pag: 172  
notatiunculam meam de quodam Paradoxo, quod J:  
D'Alambert invenere in Analysi non dubitavit. Et  
lapso anno literas ipsi dedi, quae ejusdem expositionem  
complectebantur; rescripsit Auctor tergiversationes potius

vando, quam rationem meam oppugnando; saltem itaque ipse  
si rem totam publici juris faceret, ut omnino contentus  
in privatarum molestiam effugerem. De rebus Physicis  
Anatomicis nihil loquor ut potest quae mihi extraneae  
vires esse videntur. Interim si tibi acquiescere vide-  
atur, Vir Clarissime, totum hunc librum Academiae  
tuae iudicio submittere facultas omnino parata est, et  
viximur hanc de re Societas nostra integra tibi gratias  
habere. Si approbationem aliquam apud vos promereri  
possimus, id nobis certe maxime vertemus gloriae, et  
vel etiam ad studiorum nostrorum aestinationem non  
dicemus, ac tutelam quoque nobis in hac ditione nobis  
mandam summo opere conducere. Tominum De Maun-  
stuij regio ubi moratur, quamobrem te deprecor ut  
se de ipsius domicilio certioram reddat, quo literas ipse  
recipere, et librum hunc quoque mittere possit. Opus  
meum moliebatur de Applicatione Principii Affinitatis quan-  
tativae actionis pariter ad Mechanicam universam, per-  
fectum est; illum in duas partes distribui; In pri-  
ma exponitur methodus mea Maximorum, et Minimarum  
ad formulas integrales indefinitas applicata, quae uni

maximam, quam potui extensionem tribuere conatus sum  
ita ut parum amplius desiderari possit videretur: in hac ma-  
teria. Secunda pars agit de Principio minimae quantita-  
tis actionis, cuius ope, difficultatibusque, et per methodum  
antea explicatam difficiliora quaeque Mechanicis proble-  
mata facillime, et universaliiter resolvuntur. Animus  
erit, si id fieri poterit, illum Revolucionum antea mittere  
ut tum tuo, tum D. De Haugartui, tum Academiae  
integrae iudicio submitteretur; et deinde tibi quoque  
illis consignari poterit, et ad evitanda incommoda omnia  
quae in regionibus nostris in libris edendis occurrunt.  
Quid hoc de re gentium mihi pergratum faciat si id  
significare non dedignaveris. Verum fortassis ante  
acceptam istam epistolam, alia <sup>mea</sup> tibi reddetur, in  
quam de hac re longius agere mihi libet.  
Interim vale vir Clarissime neque indifferenter crede

Dabam Laurini  
die 28, Julii  
anno 1759.

Anglissimi tui nominis  
Cultorem, et Veneratorem  
candidissimum Ludovicum  
de la Grange

Monsieur

De Paris le 24 Novembre  
1759.

rien ne pouvoit m'arriver de plus agréable que l'honneur  
de vos lettres, qui m'apprenent de la continuation de votre  
précieuse amitié; j'ai été charmé surtout d'apprendre que  
vous ayez enfin reçu le livre que j'avois prié la liberté  
de vous envoyer comme un témoignage de respectueux  
attachement que je conserve sans cesse pour votre illustre  
personne. Notre Société vous est infiniment redevable de  
la bonté que vous avez eue d'examiner ses travaux, et  
de jugement honorable, que vous en portez; Vos suffrages,  
Monsieur, sont pour nous le plus flatteur, et ce n'est  
que par eux que nous croyons pouvoir justement apprécier  
notre Ouvrage. Le succès de cette première entreprise  
nous encourage à ne pas l'abandonner, et nous espérons  
de donner au Public un semblable volume. L'au milieu

de l'année prochaine. Il n'y aony d'ailleurs tout lieu de  
croire que le gouvernement ne manquera pas de fonder  
une société naissante, qui sans un établissement con-  
nable ne sauroit pas subsister longtems; mais on  
pourroit l'engager le plus ce seroit de voir que les  
membres qui tiennent le premier rang dans les  
sociétés dignent y concourir, et l'appuyer par le  
nom, et leur ~~nom~~<sup>credit</sup>. M. Haller vient de nous  
cet honneur en nous promettant deux Dissertations  
pour les tomes quivient. Oserai-je vous supplier  
Messieurs, d'une faveur semblable, au nom de  
toute la société? Les lettres de notre pair sont  
doute fidèlement conservées une vive reconnaissance  
ceux qui les ont les premiers honorés, et  
je. Je ne sais que vous voudriez vous déigner de nous  
envoyer quelques Pièces, vous pouvez, s'il n'y a  
d'autres voies plus commodes, et plus sûres, nous  
faire tenir directement par la poste en l'adressant à  
Geneve sans craindre nullement la grosseur des pages

Je me croiy extrêmement heureuse d'avoir pu contribuer a mettre  
votre solution des cordes vibrantes a l'abri des toutes les ob-  
jections des M<sup>rs</sup>. Bernoulli, et d'Alambert. Il est vrai que le calcul en  
est assez long et compliqué, mais je ne sai pas si en envisageant  
ces choses comme j'ai cru devoir faire on pourroit les abréger,  
ou simplifier. J'ai cependant imaginé depuis peu une autre so-  
lution Analytique, par laquelle je parviens directement de la  
formule différentielle.  $(\frac{dy}{dx}) = c(\frac{dy}{dx})$  a la meme construction  
générale que j'ai donnée dans l'art. 45, sans que la nature du  
problème puisse porter la moindre atteinte a sa généralité; car cette  
nouvelle méthode est fondée sur les memes principes que l'ancienne que  
j'ai expliquée pour le cas d'un nombre indéterminé de corps mobiles.  
avec cette différence que les opérations ici sont toujours sur  
des termes infiniment petits ne sont composées que de intégrations,  
et différentiations convenables. Cette solution étant d'un genre  
entièrement nouveau ne sera peut être pas aussi indigne de  
votre attention, et elle servira encore plus a établir l'usage de  
méthodes irrégulières, et discontinues dans une infinité d'autres  
problèmes. De la réserve pour le second tome de nos M<sup>rs</sup>.  
suivants. A propos de la solution générale lorsque les cordes a  
commencent une figure quelconque avec des vitesses données.  
Je suis sur mes points vous sçavez que je l'ai donnée dans l'art. 46  
et je ne doute pas qu'elle ne soit entièrement conforme a celle  
que vous avez inventée; mais il faut avoir regard a l'erreur  
qui se trouve a la fin de tout le livre. Si l'on suppose que.

dans le premier état de la corde, on ait  $y = \varphi \cdot x$ , et  $w = \Delta \cdot x$   
 on aura généralement  $y = \frac{\varphi \cdot (x+ct) + \varphi \cdot (x-ct) + \int \Delta \cdot (x+ct) - \int \Delta \cdot (x-ct) dt}{2}$ , d'où l'on tire par la différentiation les valeurs

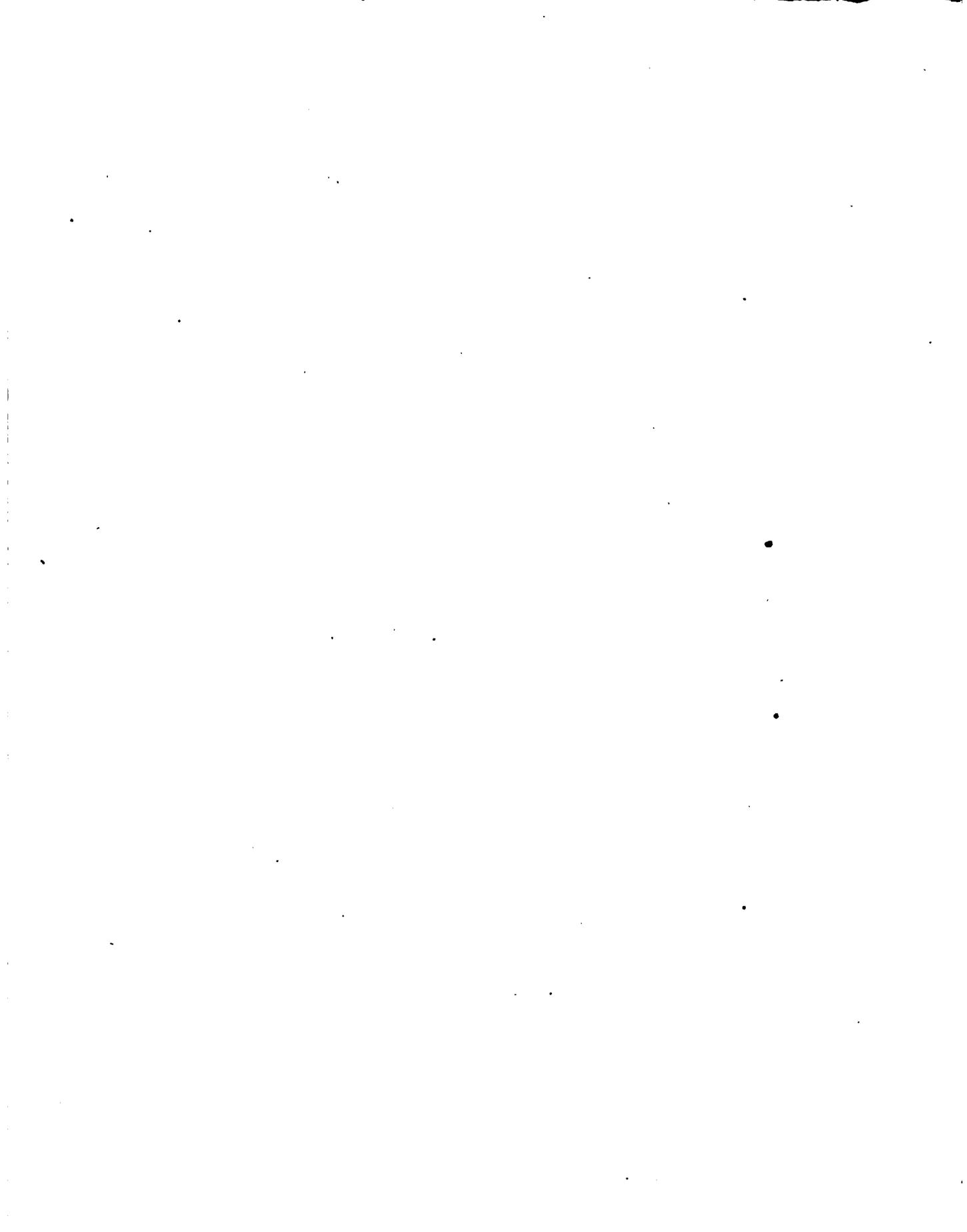
J'ai reconnu avec une grande satisfaction ce que vous dites de la  
 présence entre les ébranchemens primitifs, et dérivatifs; c'est apparemment  
 une remarque bien importante tant pour le calcul, que pour la  
 physique, et digne de votre profond génie. Après avoir presque  
 achevé ma théorie sur la propagation du son, je me suis occupé  
 que j'aurais pu également les tirer des constructions de  
 dy cependant comme il j'agissait de fonctions tout à fait diffé-  
 rencielles j'ai aimé mieux les déduire directement de mes formules  
 générales. Une chose qu'en y pensant de nouveau m'a paru  
 plus exacte c'est la supposition que je fais qu'une seule  
 particule d'air soit ébranlée à chaque vibration du corps sonore  
 d'où il n'en résulte dans les particules suivantes qu'un mouve-  
 ment tout à fait instantané. Je croirois donc que pour plus conformer  
 plus à la nature, il sera mieux d'imaginer que plusieurs  
 particules d'air soient remuées à la fois par le corps sonore,  
 on trouvera dans ces cas que chacune des particules suivantes  
 recevra un mouvement qui ne sera plus instantané, mais  
 qui s'étendra tout à fait après un certain tems; et ce  
 sera le même que celui que le son mettoit à parcourir  
 la longueur de l'espace par lequel on suppose que les particules  
 soient agitées dans le premier ébranlement. Or le son parcou-  
 re par exemple 1200 piés par seconde, et le ton le plus aigu ne  
 fait que environ 1400 vibration dans le même tems, il s'enquerra

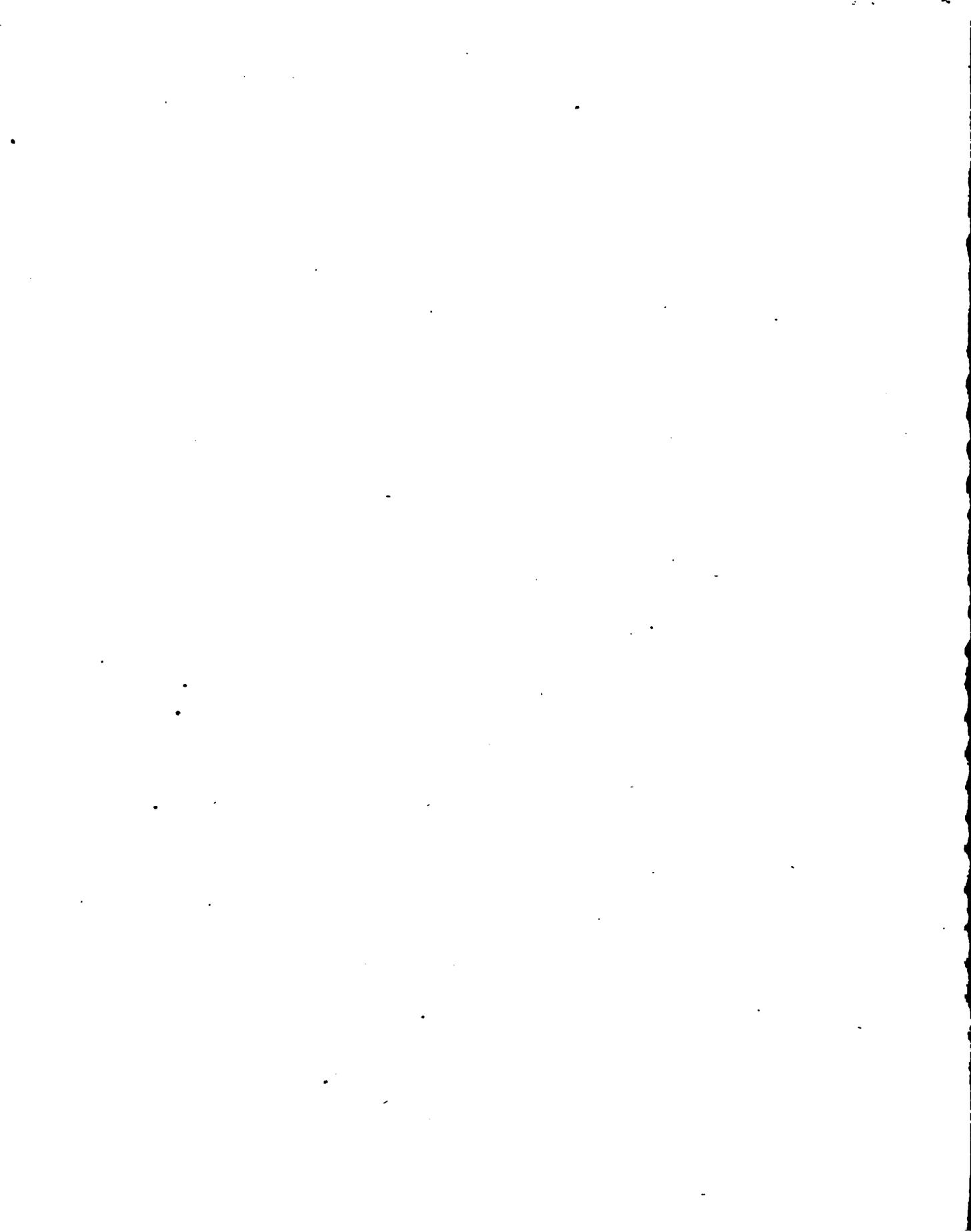
à moins que l'étendue de la première onde d'air (pour ainsi  
dire) ne surpasse la longueur de nos deux tiers d'un pied, ce  
qui n'est nullement probable, chaque particule sera reduite  
au repos avant qu'elle puisse recevoir une seconde secousse.  
Ainsi tout se passera de même comme dans l'hypothèse de  
l'abandonnement instantané, et les lois de la propagation, et de la re-  
flexion des sons demeureront aussi les mêmes. Je suis parfaitement  
d'accord avec vous, Monsieur que les vrais lois de la propagation  
du son dépendent de la considération d'une triple dimension  
dans l'air, et c'est de là qu'on doit <sup>aussi</sup> tirer la théorie de la di-  
minution du son; car en ne regardant qu'une ligne physique  
il est tout naturel et le calcul le montre aussi, que la force des  
sons ne doit <sup>d'elle même</sup> souffrir aucune diminution; je doute que les propor-  
tions connues de la diminution en raison inverse du carré de  
distance soit <sup>n'est</sup> exacte, mais on ne peut s'en assurer que par un calcul  
tout à fait rigoureux qu'on pourra s'en assurer. J'aurais  
l'honneur de vous parler une autre fois de ce que j'ai trouvé  
de nouveau touchant le logarithme, et l'usage application du  
sinus de la moindre quantité d'action. Je suis ravi que  
vous continuiez à enrichir la République des Lettres par de  
nouveaux ouvrages très importants, tels que le Calcul Differen-  
tiel, et Intégral, et le troisième tome de la Mécanique.  
Je tâcherai de le acquiescer <sup>voic</sup> ou par la voie de Genève, ou de  
Paris s'il m'est possible. J'ai aussi composé moi même dans  
~~quelques~~ <sup>éléments</sup> de Mécanique, et de Calcul différentiel, et intégral,  
à l'usage de mes écoliers, et j'aurais voulu développer <sup>les</sup> méta-  
physiques de leurs principes, autant qu'il est possible. Je vous

supplie de faire agréer mes complimens et mes services a votre  
Savant Fils Albert que je vois marcher sur vos illustres traces.  
et je suis avec la plus parfaite consideration

Votre tres humble, et tres Obeis:  
serv: Louis de la Grange

A Monsieur  
Monsieur Euler  
Directeur de l'Académie  
Royal des Sciences, et  
de l'Art de Berlin





Monsieur

Par les dernières lettres que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire  
m'avez proposé de résoudre l'équation  $(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}) = c(\frac{\partial^2 z}{\partial z^2}) + c \frac{\partial z}{\partial z} - c \frac{z}{z^2}$   
bien  $(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}) = c(\frac{\partial^2 z}{\partial z^2}) + c(\frac{\partial \cdot \frac{z}{z}}{\partial z})$  qui renferme les loix de la propagation  
son dans les cas que l'on abrètemens se regardent en formes d'ondes  
sphériques. Comme je n'avois pas alors tout les loix nécessaires pour en-  
tendre une telle recherche j'ai été obligé de la remettre à un  
autre tems, c'est pourquoy je n'en ai point dit un mot dans la  
lettre que je vous fis alors, et que je me flatte que vous avez bien  
vue. Maintenant voici les principaux résultats de mes réflexions  
sur ce sujet. Ayant trouvé, quelques tems avant, le moyen de primi-  
tivement mes méthodes de cordes vibrantes dans les cas de la corde uni-  
quement épaisse, et de parvenir directement de l'équation différentielle  
à la construction Géométrique par deux intégrations distinctes l'  
une en  $z$ , et l'autre en  $t$ , je croyois devoir essayer si les mêmes pro-  
cédés auroient aussi été applicables à l'équation proposée, mais pour  
le calcul devenoit assez compliqué, et incertain à cause de  
quelques équations qui tomboit dans les cas de Riccati, j'ai aimé  
plutôt de considérer d'abord la question dans l'état qui peut avoir  
dans la nature, savoir en supposant que l'abrètemens se res-  
sentent en forme d'ondes sphériques. Pour cela après avoir trouvé l'  
équation  $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} + c \frac{\partial \cdot \frac{z}{z}}{\partial z}$ , et l'avoir maniée par un grand  
nombre d'opérations que mes méthodes exigeoit, j'ai pu enfin parvenir  
à une construction Géométrique assez simple par laquelle étant  
donnés les abrètemens primitifs de l'air dans une trajectoire conique  
infinitement prolongée il est aisé d'en déterminer deux les suivans.  
J'ai trouvé que l'air n'estant abrèté d'abord que par une foix petit

égales au sommet des cones, cet ébranlement qui peut être regardé  
 comme une onde sonore se communique d'une partie de l'air à l'autre  
 et avance toujours avec une vitesse constante, et la même que  
 qui connoît au cas d'une simple ligne physique; mais en même  
 temps la force de l'ébranlement ira en décroissant dans les raies in-  
 finies de la distance, ce qui semble s'accorder, avec les expériences  
 ordinaires sur la diminution du son. En examinant ensuite plus  
 particulièrement la même construction je me suis aperçeu que je pouvois  
 assigner l'intégrale de l'équation proposée en termes algébriques  
 Je vois;  $\zeta + \frac{d^2 \zeta \zeta}{dz^2} = \Phi(\zeta \pm t\sqrt{c})$ , d'où l'on tire  $\zeta = \int \sqrt{\Phi(\zeta \pm t\sqrt{c})} dz$   
 où la fonction  $\Phi$  peut être continue, ou discontinue comme l'on voit.  
 Cette équation, si on la traite d'une manière convenable suffira  
 pour découvrir tout le mouvement de l'air dans un tuyau conique  
 d'une longueur quelconque, pour quelque agitation primitive qu'on  
 suppose imaginaire; mais aussi il ne sera pas fort difficile de voir que  
 le système dans ce cas ne pourra jamais plus reprendre sa première  
 position si ce n'est par hazard, ou par les moyens de certaines con-  
 ditions dans le ébranlement primitif, puisque les branches de la courbe  
 génératrices qui doivent être tracées de part, et d'autre de l'infini-  
 té ne se trouvent pas semblables entre elles comme celles des cordes  
 vibrantes. Vous pouvez, Monsieur, avec peu d'attention découvrir  
 toutes les conséquences qui résultent de cette formule, sans que je  
 sois en état de dérober à mes efforts. Après avoir ainsi rempli mon objet  
 je suis revenu au cas des ondes circulaires, mais j'ai été tout-à-fait  
 de trouver que le problème dans cette hypothèse qu'en apparence plus  
 plus que l'autre se résout néanmoins une exacte solution. Je ne  
 donne à considérer la question dans le cas le plus général en supposant  
 que la figure conoidale du fluide rempli d'air, telle que chaque

perpendiculaires et l'axe soit proportionnelle à  $z^m$ ,  $z$  étant la distance du  
 point des cordes données. En ce cas j'ai trouvé l'équation différentielle  

$$= c \left( \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} \right) + m c \left( \frac{\partial z}{\partial z} \right)$$
 et de là par ma méthode j'ai tiré la formule

$$\frac{\partial z}{\partial z} + \frac{m-2}{2(m-2)} \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} + \frac{(m-2)(m-4)}{2 \cdot 2(m-2)(m-2)} \frac{\partial^3 z}{\partial z^3} + \alpha = \varphi(z \pm t \sqrt{c}).$$

Je trouve en même temps une autre formule pour la valeur de  $z$

$$z^m = \varphi(z \pm t \sqrt{c}) - \frac{z \partial \varphi(z \pm t \sqrt{c})}{\partial z} + \frac{m-2}{2(m-2)} z^2 \frac{\partial^2 \varphi(z \pm t \sqrt{c})}{\partial z^2}$$

$$+ \frac{(m-2)(m-4)}{2(m-2)(m-2)} z^3 \frac{\partial^3 \varphi(z \pm t \sqrt{c})}{\partial z^3} + \alpha; \text{ ou la fonction } \varphi \text{ dépend de}$$

par un nombre d'intégrations relatif aux nombres  $m$ . On voit par

formule que  $z$  n'aura jamais une valeur exacte que dans les

cas où  $m$  est pair et positif, dans tous les autres les séries vont à l'infini

et si  $m$  est impair positif il y aura toujours quelques termes

qui s'évanouissent au commencement d'elles. Les cas où  $m$  est pair

positif admettent néanmoins une solution exacte lorsque  $m$

trouvera la formule pour ces cas en posant dans les sup

au lieu de  $z$  et puis  $-m-2$  au lieu de  $m$ , car on

voit que par ces transformations l'équation différentielle demeure

la même. Au reste j'ai reconnu que dans toutes les équations

de semblable nature on peut souvent abréger le calcul en

posant d'abord  $z = A \varphi(z + Kt) + B \frac{\partial \varphi(z + Kt)}{\partial z} + C \frac{\partial^2 \varphi(z + Kt)}{\partial z^2}$

où  $A, B, C$  et  $\alpha$  étant des fonctions de  $z$  qui se déterminent après

substitution par la simple comparaison des termes; mais si l'

équation renferme quelques termes qui ne contiennent point le  $z$ , ou

quelques de ses différences il seroit peut-être alors indispensable d'

avoir recours à une méthode directe, la mienne seroit encore utilis-

able que fut la nature de ce terme. Je compte d'expliquer cette

matière dans une dissertation particulière que je prépare pour la

Volumes de nos *Urbilangy* de l'année prochaine, en attendant je com-  
mence par vous remettre ce petit opus à votre jugement que je regarde  
de comme les premiers d'ay le petit nombre de ceux qui peuvent suffi-  
amment me flatter, ou me donner de la peine. J'ayney *Urbilangy*  
d'accepter le sause que j'ay jointes avec ceux de toute les *Repub-*  
*liques* de l'etroy pour la conservation de vos précieux vie.  
Je suis avec les plus respectueux attachement.

Jusins 26 Decembra *Monsieur*  
1759.

Votre très humble, et très Obed. Serv.  
Louis de la Grange.

*Mrs Nirench*  
~~*les d'indicates*~~

*Monsieur Euler*

Directeur de l'Académie

Royale des Sciences, et des Lettres

de Berlin

1759-2



Monsieur

Votre Société a reçu les pièces, que vous m'avez fait l'honneur de m'adresser  
par votre dernière lettre du 2 Janvier, avec tout le sentiment d'estime, et  
de reconnaissance due au mérite de votre illustre Personne. Elle est extrêmement  
flattée de pouvoir orner ses nouvelles collections d'un nom tel que le Votré, car  
il ne peut pas manquer de lui attirer dans le Public une considération à la  
quelle elle n'auroit jamais pu prétendre. Quelque occupation indifféremment  
ont empêché de vous répondre plutôt pour m'acquiescer de ce devoir que  
de la Société m'a d'abord engagé, de vous remercier en son nom, et de  
vous témoigner combien elle se sente flattée d'une telle marque d'honneur qui  
vous a plu de lui donner, je vous prie d'en recevoir mes très humblement  
par les voyes Recherches sur la propagation des branchemens dans une milieu élastique  
ou les mêmes admirations avec les quelle j'ai toujours étudié vos Ouvrages  
à être charmé surtout de voir l'Analyse des problèmes de la propagation des  
branchemens finis, sur lequel je n'étois déjà exercé en vain, je doute cependant  
si on pourra jamais, au moins par la méthode connue parvenir à la construction  
de telles équations, dans lesquelles les fonctions inconnues se trouvent engagées  
à des puissances quelconques, comme il en est de celles que vous avez  
trouvées pour les branchemens finis. Il y a longtems que cette espèce d'équation  
n'est connue, y ayant été conduit par les recherches de plus grands, et plus célèbres  
par les surfaces courbes selon ma méthode Analytique que j'ai en autre fois  
l'honneur de vous communiquer. Par exemple si l'on cherche la figure d'un  
cylindre qui sous la même surface ait la plus grande solidité je trouve en  
prenant  $x, y, z$  ses coordonnées rectangulaires de sorte que  $z = \text{const.} \cdot xy$ , et  
l'équation générale 
$$d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + d \cdot \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{1}{a} = 0$$
  
étant une constante arbitraire quelconque;  $\frac{p}{2x}$   $\frac{q}{2y}$   
ce qui donne une sphère de rayon  $a$  ou  $2a$ , mais ce n'est pas la solution  
particulière; à l'égard de la générale je désespère de pouvoir jamais  
la trouver. Il en est de même de tous les autres problèmes de maximis, et

minimis, que personne que je sache n'a jamais eue traitée sans ce nouveau  
 point de vue. J'ai été extrêmement satisfait de trouver dans vos  
 Mémoires la construction de l'équation pour les aberrations sphériques  
 finement pectées, but a fait conforme a celles que mes méthodes m'ont données  
 et que j'espère que vous aurez vu dans les lettres que je vous ai  
 cela envoyée le 25 Décembre de l'année passée. Il n'y a de différence  
 entre vos résultats, et les miens, qu'en ce qui regarde l'affoiblissement  
 aberrations, dont vous faites diminuer les forces au raison inverse de  
 distance lorsque elles sont assez grandes, au lieu que cette raison se trouve  
 selon mes calculs toujours l'inverse de quarré de distance; mais c'est une  
 mesure que j'ai raisonnée en suite, et dans laquelle j'ai été entraîné en  
 considérant l'équation intégrale  $\zeta = \int \zeta \varphi(\zeta \pm \pm \pm)$ , qui m'a d'abord  
 abondamment résulté; sans y donner l'attention nécessaire. M. Daniel Bernoulli  
 m'a écrit il n'y a pas longtemps, que des recherches qu'il avoit fait faites  
 sur les vibrations de l'air dans des tuyaux coniques lui avoient appris que  
 les forces de aberrations diminuoit aussi dans le raison inverse de  
 ces simples depuis le sommet du cône, ce qui de tout être ainsi pour les  
 aberrations regardés a la ronde autour d'un point, il faudroit que la même  
 loi fut encore observée dans la lumière, supposée que sa propagation  
 se fasse, comme il est très vraisemblable, par les aberrations d'une manière  
 stérique, ce qui ne s'accorde pas avec l'opinion reçue de Physiciens, qui  
 établissent sa diminution dans le raison inverse double de distance; et  
 pourquoi ce Géomètre souhaiteroit qu'on fit, sur ce sujet des expériences  
 exactes qui pussent nous mettre en état de décider un point si important.  
 Dans mes dernières lettres mentionnées je n'ai donné que les formules que  
 je pour résoudre l'équation  $\frac{d^2 \zeta}{dz^2} = c \left( \frac{d^2 \zeta}{dz^2} + m' d \cdot \frac{\zeta}{z} \right)$  qui contient les  
 les lois de aberrations de l'air dans un tuyau conical dont les sections  
 sont proportionnelles a  $z^m$ , formules qui ne deviennent exactes, et finies, que

que  $\pm (n+1) - 1$  est un nombre pair positif; Or j'ai trouvé <sup>moyens</sup> de la dé-  
 couvrir à cette autre équation  $z^n \frac{d^2 z}{dz^2} = c \left( \frac{dz}{dz^2} + n \frac{z}{z} \right)$  qui est  
 une plus générale, et qui appartient aussi au même problème mais en  
 posant l'air élastique, et des différences de gravité spécifiques; j'ai trouvé que  
 pour que la valeur de  $z$  soit ici exprimée par une formule finie il faut  
 que  $\pm \frac{2n+2}{n+2} - 1$  soit un nombre pair positif. Si on suppose  $n=0$ , on  
 a la solution du problème de vibration de cordes inégalement épaisses, qui  
 peut être exacte par mes calculs que au moins que  $\pm \frac{2}{n+2} - 1$  soit un  
 nombre pair positif, de sorte que posant pour  $\mu$  un nombre quelconque  
 pair positif, il faudra que  $n = \pm \frac{2}{\mu+1} - 2$ . Par exemple si  $\mu=0$ , et  
 $n$  prenne le signe négatif on aura  $n = 4$  et  $z = z \varphi(z^2 \pm t\sqrt{z})$   
 si  $\mu=1$ , prenant le signe positif on aura  $n = -\frac{4}{3}$  et la valeur de  $z$   
 sera  $z = \varphi(z^{\frac{1}{2}} \pm \frac{t\sqrt{z}}{2}) - z^{\frac{1}{2}} \varphi'(z^{\frac{1}{2}} \pm \frac{t\sqrt{z}}{2})$ ; en général ces formules auront  
 pour autant de termes qu'il y a d'unités dans  $\mu+1$ ; mais ce qui est de  
 remarquable, c'est qu'excepté les premières, et celle où  $n=0$ , qui ne sont  
 composées que d'un seul terme toutes les autres donnent des courbes généra-  
 les avec des branches dissemblables à l'infini; d'où il suit que les cordes ne  
 peuvent jamais plus, regarder leurs figures primitives, si elles n'arrivent par  
 hasard, et même par conséquent un ton fixe, et invariable; c'est ce que  
 l'expérience paroît confirmer dans toutes les cordes d'inégale épaisseur, et que  
 l'habitude nomment pour cela fauxes. Comme il s'agit de la dernière  
 question de décider si la grandeur de branlement peut rendre leur propa-  
 gation plus prompte; j'ai cherché des moyens pour résoudre ce problème au-  
 tant par approximation en supposant d'abord le branlement infiniment petit  
 et puis en introduisant dans les termes qu'on a négligés les valeurs trouvées,  
 résolvant de nouveau l'équation, comme on le pratique ordinairement  
 dans toutes les approximations. J'ai vu que ce tout dépendoit de la résolu-  
 tion de l'équation  $\frac{dz}{dz^2} = c \frac{dz}{dz^2} + F$ , et  $\frac{dz}{dz^2} = c \left( \frac{dz}{dz^2} + 2 \frac{z}{z} \right) + F$ ; F étant

une fonction quelconque donnée de  $z$ , et  $t$ ; Or j'ai trouvé pour cela, mes méthodes by formules suivantes. Soit fait  $z + t\sqrt{c} = p$ ;  $z - t\sqrt{c} = q$  et substituant dans  $\int \frac{dz}{z}$  au lieu de  $z$ , d'abord  $p - t\sqrt{c}$ , ensuite  $q$  qui elle devienne  $\psi: p.t$ , et  $\psi: q.t$ ; on aura pour la première eq  $z = \phi p + \phi q + \frac{\int (\psi: p.t - \psi: q.t) dt}{2\sqrt{c}}$ ; et pour la seconde.

$$z + \frac{d.z}{dz} = \phi p + \phi q + \frac{\int (\psi: p.t - \psi: q.t + p - t\sqrt{c}) \frac{d.\psi: p.t}{dp} - q + t\sqrt{c} \frac{d.\psi: q.t}{dq}}{2\sqrt{c}}$$

Or en considérant la eq d'une ligne physique d'air on trouve aisément l'équation  $\frac{dz}{dt} = c \frac{dz}{dz} - c \frac{d}{dt} \left( \frac{dz^2}{dz} - \frac{dz^2}{dt^2} + \alpha \right)$ ; On aura donc pour la première

$$\text{approximation qui provient du terme } \frac{dz^2}{dz^2}, z = \phi p + \phi q - \frac{t\sqrt{c}}{2} \left( \phi' p - \phi' q \right) - \frac{1}{2} (\phi' p - \phi' q) (\phi' p - \phi' q) \text{ sans erreur de calcul;}$$

On trouvera ainsi les approximations suivantes des termes de trois, de quatre et de cinq  $q$ . Or après que la vitesse de la propagation augmente il faudroit que fut le coefficient de  $t$  dans  $\phi p$ , et  $\phi q$  qui augmente, ce qui demanderait de termes à ajouter à  $\phi$  de cette sorte  $\alpha t \phi'$ ,  $\beta t^2 \phi''$   $\alpha$ ; et me paroit de pouvoir conclure que les termes trouvés ne sont nullement propres à faire augmenter l'erreur cette vitesse; On trouvera aussi de même semblablement en calculant la propagation par la seconde formule mais je me défends néanmoins de rien décider sur ce point avant d'avoir votre jugement, que je suis très empressé à vous demander. A cet égard lorsque le temps  $t$  aura une valeur après grande les termes qui ne sont multipliés par  $t$  s'évanouiront auprès de ceux de leur semblables qui le sont on trouvera dans ce cas la formule  $z = \phi p + \phi q - \frac{c\sqrt{c}t}{2} \left( \phi' p^2 - \phi' q^2 - \frac{c\sqrt{c}t^3}{2.4.6} \left( \frac{d.\phi' p^2}{dp} \right)^2 - \left( \frac{d.\phi' q^2}{dq} \right)^2 - \frac{c\sqrt{c}t^3}{2.4.16.9.3} \alpha \right)$ . A l'égard de la formule des pour la propagation sphérique elle est si compliquée que ce n'est pas la peine de la transcrire. J'ai l'honneur d'être avec une parfaite considération, et un entier dévouement

Turin le 2 Mars 1760.

Votre très humble, et très obéissant  
Serviteur de la Grange

A Paris le 14 Juin 1762

Monsieur

Voici le second Volume des Mélanges de notre  
Société que le Roi a bien voulu honorer des  
titres de Société Royale. Elle m'a chargé  
de vous l'envoyer, et de vous prier de l'accepter  
comme un tribut qu'elle vous doit, et qui elle  
est bien glorieuse de vous devoir.

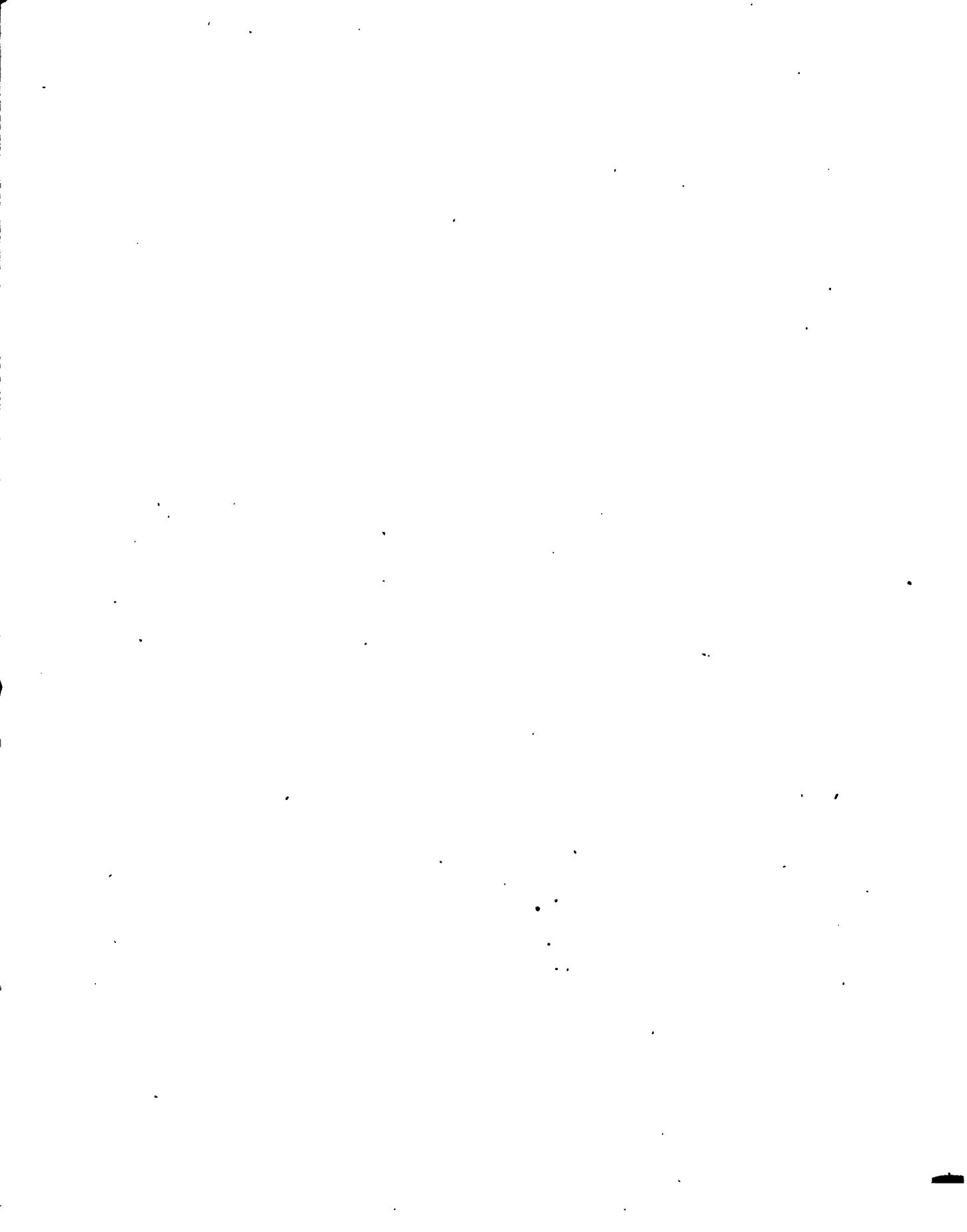
Comme j'ai quelque part à cet Ouvrage  
je vous prie encor, Monsieur, de me

permettez de vous le présenter comme un  
témoignage de respect, et de de l'attachement  
avec lequel j'ai vécu, et j'ai pu toute ma vie

Monsieur

Votre très humble et  
très obéissant serviteur  
de la Grange

---



A Monsieur  
Monsieur Euler  
Président de l'Académie  
Royale des Sciences et  
Belles-Lettres de Berlin

Monsieur

Votre Société a fait paraître il y a quelques mois  
un grand volume de ses Mélanges; et elle s'est fait  
un gloire d'y insérer votre excellent Mémoire sur  
l'abandonnement dans un milieu élastique; Je n'ai pas  
manqué aussitôt que j'en ai pu, de m'acquitter de devant  
elle m'avoit chargé, en vous envoyant un exem-  
plaire de cet Ouvrage, que j'ai aussi accompagné d'une  
de mes lettres; mais de crainte de quelque accident qui  
eût l'empêcher de parvenir entre vos mains, j'ai cru  
devoir encore profiter d'une autre occasion qui s'est pré-  
sentée depuis peu pour vous en faire tenir une autre  
copie. Si vous les recevez toutes deux, je vous prie d'en  
renvoyer une de ma part à M. Lormey Secrétaire de  
votre Académie.  
Je me vous dirai rien sur les parties de ce Mémoire qui

m'appartient; c'est à vous de apprécier mes travaux,  
j'attends sur cela votre jugement avec la plus grande  
impatience.

Agant appris par une de vos lettres du 1759 que vous aviez  
fait après de ces de mes méthodes: de maximis, et minimis  
pour l'étendre, et la perfectionner dans un traité géométrique  
j'ai cru devoir supprimer entièrement celui que j'avois  
presque déjà achevé sur ce sujet, et je me suis borné à  
en exposer simplement les principes dans un élémentaire que  
j'ai tâché de rendre le plus court qu'il m'a été possible;  
je ne me suis même déterminé à composer ce élémentaire  
que parce que vous m'avez fait l'honneur de <sup>me</sup> mander  
dans les mêmes lettres que vous ne vouliez point publier  
votre travail avant le mien. Je suis impatient de  
pouvoir profiter des nouvelles lumières, que vous avez  
doute regardé sur une matière si difficile; au lieu  
je vous prie de recevoir ici mes très humble remerciements  
de l'honneur que vous avez bien voulu me faire, et  
que je regarde comme la récompense la plus flatteuse  
de mes études mathématiques.

Je dois encore vous remercier de la notice que vous avez eu  
bonté de me donner dans votre dernière lettre du sujet  
de science proposé par votre Académie pour l'année présente.  
Je ne me suis pas senti ni le courage ni la jeunesse né-  
cessaire pour travailler sur un sujet si difficile, je me flatta-  
is d'autrui auant rempli cet objet d'une manière digne de  
l'importance de la matière, et de vous profonds de l'Académie  
je souhaiterois fort de connaître les pièces qui auront été  
présentées. Au reste vous m'obligerez infiniment de m'en-  
voyer par vos questions qui auront été proposées pour les  
prix de l'année qui viennent tant par votre  
Académie, que par celles de Pétersbourg.

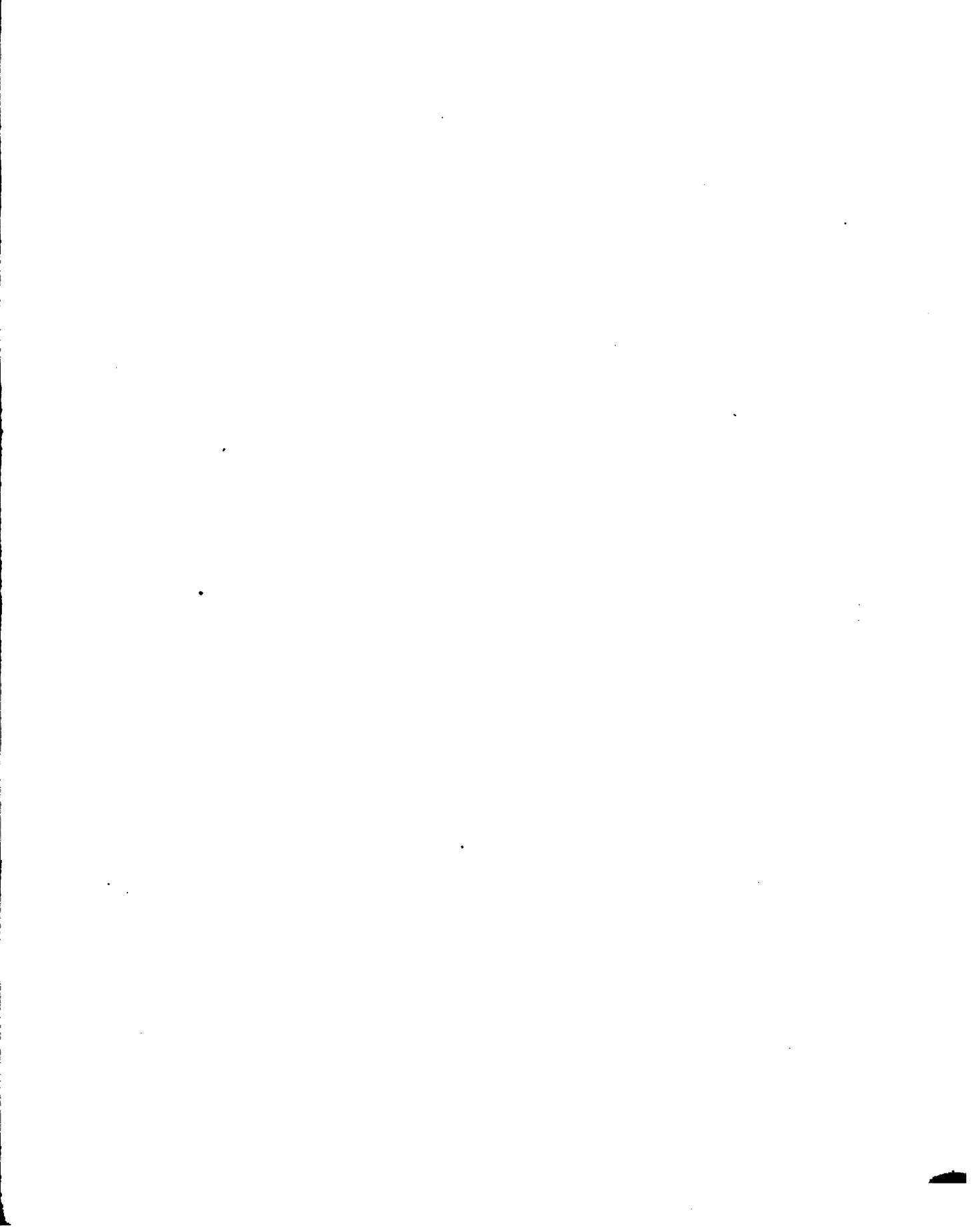
J'ai l'honneur d'être avec toute l'estime, et <sup>avec</sup> les sentiments  
que je dois à votre personne, et à l'amitié dont vous  
m'honorez.

Monsieur

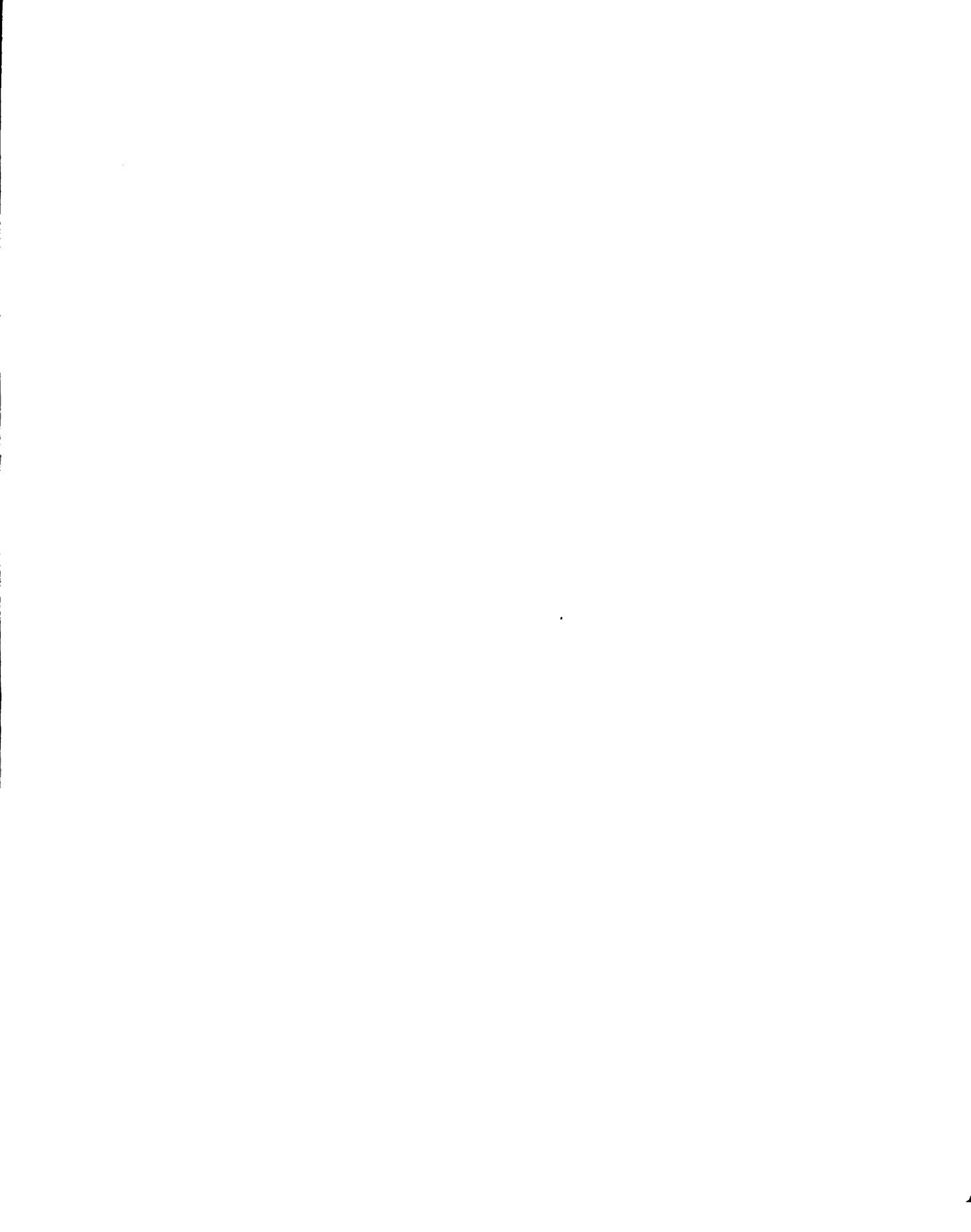
Paris le 30 Octobre  
1762.

Votre très humble, et très Obeï.  
Serviteur de la Grange.





6





~~191~~  
~~502009~~

STALL STUDY  
CHARGE  
CANCELED